Klassenstufe 7-8 – Lösungen

Aufgabe 1

a) Sie kann um 13:45 Uhr dort sein, auf dem Weg

e4 – **e5** – **d5** – **d6** – **e6** – **e7** – **d7** – **d8**.

Früher kann sie nicht dort sein, denn es gibt keinen Weg der Längen 1, 2, 3, 4 oder 6, und jeder Weg der Länge 5 enthält zwei aufeinanderfolgende Schritte in dieselbe Richtung, kann also von der Schnecke nicht genommen werden.

b) Nach jeder halben Stunde ist die Schnecke auf einem weißen Feld, also auch um 17:00 Uhr.

Da **h8** ein schwarzes Feld ist, kann sie dort nicht sein.

c) Um *Viertel nach* oder *Viertel vor* befindet sich die Schnecke auf einem schwarzen Feld, also nicht auf **e4**.

In einer halben Stunde bewegt sich die Schnecke auf ein diagonal benachbartes Feld.

Sie kann nur nach einer geraden Anzahl solcher Bewegungen wieder auf dem Feld **e4** sein, also nur zu einer vollen Stunde.

Das gibt es tatsächlich, z.B. wenn sie sich jedes Mal nach rechts dreht.

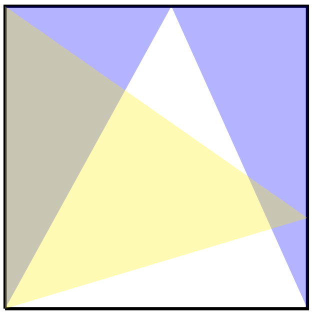
Aufgabe 2

Antwort: 26.

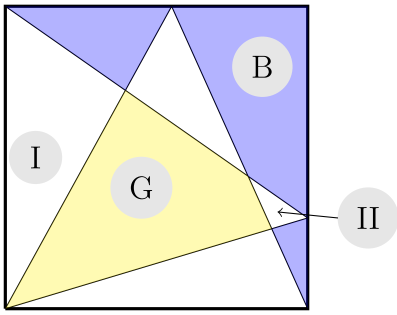
Denn eine Lampe wird am Ende an sein, falls sie einmal, dreimal oder fünfmal geschaltet wird, andernfalls wird sie am Ende aus sein.

Daher reicht es, die Felder zu zählen, welche eine ungerade Anzahl von Nachbarn haben.

Aufgabe 3



Die Fläche eines Dreiecks berechnet sich aus $\frac{1}{2}$Grundfläche $\cdot$ Höhe.
Daher sind die Flächen des gelben und des weißen Dreiecks gleich groß, nämlich jeweils einhalb mal so groß wie die Fläche Q des Quadrats.
Damit ist auch die blaue Fläche gleich $\frac{1}{2}Q$.



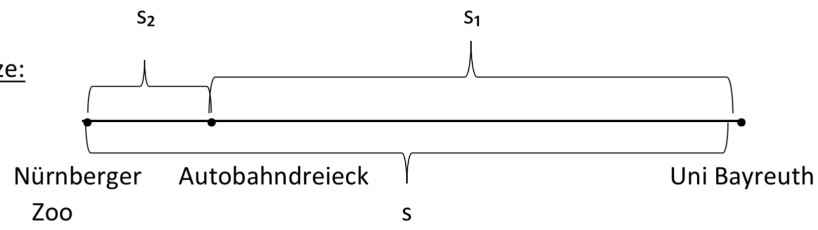
Vergleiche die Teilflächen:

$$I + G + II = \frac{1}{2}Q = I + B + II\,.$$

Es folgt $G = B$.

Aufgabe 4

Skizze:



Gegeben ist: $s = 80$ km die Gesamtstrecke von der Uni bis zum Zoo
Alex fährt auf der Hinfahrt: v_A , auf der Rückfahrt: $2v_A$
Benni fährt auf der Hinfahrt: v_B , auf der Rückfahrt $1,25v_B$
Gesucht ist: s_2 , d.h. die Strecke zwischen Zoo und Autobahndreieck.
Für die Zeiten, die Alex und Benni insgesamt zurücklegen, ergeben sich:

$$T_A = \frac{s}{v_A} + \frac{s}{2v_A} = \frac{3s}{2v_a} \quad \text{und} \quad T_B = \frac{s}{v_B} + \frac{s}{1,25v_B} = \frac{5s}{5v_B} + \frac{4s}{5v_B} = \frac{9s}{5v_B}$$

Da die beiden Jungen für die gesamte Strecke 2s die gleiche Zeit benötigen, lautet der Ansatz:

$$T_A = T_B$$

$$\frac{3s}{2v_A} = \frac{9s}{5v_B} \Rightarrow \frac{s}{2v_A} = \frac{3s}{5v_B} \Rightarrow 2v_A = \frac{5v_B}{3} \Rightarrow 6v_A = 5v_B \Rightarrow v_A = \frac{5}{6}v_B \qquad (*)$$

Der Treffpunkt P zum Zeitpunkt T liegt bei Alex auf der Hinfahrt, während sich Benni bereits auf der Rückfahrt befindet. Damit folgt:

$$T = \frac{s_1}{v_A} \quad \text{und} \quad T = \frac{s}{v_B} + \frac{s2}{1,25v_B} = \frac{5s}{5v_B} + \frac{4s_2}{5v_B} = \frac{5s + 4s_2}{v_B}$$

und somit

$$\frac{s_1}{v_A} = \frac{5s + 4s_2}{v_B}\,.$$

Mit $(*)$ gilt:

$$\frac{s_1}{\frac{5}{6}v_B} = \frac{5s + 4s_2}{v_B} \quad \Rightarrow \quad 6s_1 = 5s + 4s_2\,.$$

Da $s_1 = s - s_2$, folgt:

$$6s - 6s_2 = 5s + 4s_2 \quad \Rightarrow \quad s = 10s_2 \quad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{1}{10}s\,.$$

Antwort:
Der Treffpunkt von Alex und Benni liegt $\frac{1}{10}s = 8$ km vom Nürnberger Zoo entfernt.

Aufgabe 5

$$(\Delta + \square)^2 = \mathrm{O}\Delta\,\square$$

Die Symbole rechts vom Gleichheitszeichen stellen eine dreistellige Quadratzahl dar. Dreistellige Quadratzahlen reichen von $100 = 10^2$ bis $961 = 31^2$, denn $9^2 = 81$ (zweistellig) und $32^2 = 1024$ (vierstellig).
Folglich ist

$$10 \leq \Delta + \square \leq 31\,.$$

Die Summe zweier verschiedener Ziffern kann jedoch höchstens den Wert $17 = 8 + 9$ erreichen. Also gilt sogar

$$10 \leq \Delta + \square \leq 17\,.$$

Das heisst, es bleiben folgende Möglichkeiten:

$(\Delta + \square)^2 =$	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2
$\mathrm{O}\Delta\square =$	100	121	144	169	196	225	256	289

Da in $\mathrm{O}\Delta\square$ alle drei Ziffern verschieden sind, bleiben nur diese vier Möglichkeiten:

$(\Delta + \square)^2 =$	13^2	14^2	16^2	17^2
$\mathrm{O}\Delta\square =$	169	196	256	289

1. Fall: $\square = 6$, d.h. $\mathrm{O}\Delta\square = 196 = 14^2$ oder $\mathrm{O}\Delta\square = 256 = 16^2$.

   a) $\mathrm{O}\Delta\square = 196 \Rightarrow \Delta = 9$, aber $14 = 8 + 6 \Rightarrow \Delta = 8$. Widerspruch!

   b) $\mathrm{O}\Delta\square = 256 \Rightarrow \Delta = 5$, aber $16 = 10 + 6 \Rightarrow \Delta = 10$. Widerspruch!

1. Fall: $\square = 9$, d.h. $\mathrm{O}\Delta\square = 169 = 13^2$ oder $\mathrm{O}\Delta\square = 289 = 17^2$.

   a) $\mathrm{O}\Delta\square = 169 \Rightarrow \Delta = 6$, aber $13 = 4 + 9 \Rightarrow \Delta = 4$. Widerspruch!

   b) $\mathrm{O}\Delta\square = 289 \Rightarrow \Delta = 8$ und $17 = 8 + 9 \Rightarrow \Delta = 8$. Lösung!

Damit hast Du eine einzige Lösung: $\mathrm{O} = 2$, $\Delta = 8$ und $\square = 9$.