Klassenstufe 11-12 / Lösungsvorschläge

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1: Dünger (12 Punkte)

Aus der Angabe folgen noch die beiden sinnvollen Zusatzvor. (bzw. Lös.kandidaten) $x \geq 0$, $y \geq 0$, die wir im Folgenden erstmal vernachlässigen und erst bei Lösungen nochmal überprüfen.

a) Es gilt Kunstdünger $y = 0$. Damit ergibt sich eine eindimensionale Funktion:
Ertrag: $F(x) = E(x, 0) = -x^2 + 7x + 100$
Wo ist $F(x)$ maximal? $\Rightarrow$ Notw. Bed.: $0 = F'(x) = -2x + 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3,5$
Nun untersuchen wir die hinreichende Bed. bei $x = \frac{7}{2}$:
$F''(x) = -2$, d.h. auch $F''(\frac{7}{2}) = -2 < 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$ ist ein lok. Max. der Ertragsfunktion.
($x = \frac{7}{2}$ erfüllt auch die sinnvolle Nebenbedingung $x \geq 0$).
Ertrag: $F(\frac{7}{2}) = E(\frac{7}{2}, 0) = 112,25$.

b) Es gilt organischer Dünger $x = 0$. Damit ergibt sich:
Ertrag $G(x) = E(0, y) = -2y^2 + 14y + 100$
Wo ist $G(y)$ maximal? $\Rightarrow 0 = G'(y) = -4y + 14 \Rightarrow y = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$
Nun untersuchen wir die hinreichende Bed. bei $y = \frac{7}{2}$:
$G''(y) = -4$, d.h. auch $G(\frac{7}{2}) = -4 < 0 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$ ist ein lok. Max. der Ertragsfunktion.
($y = \frac{7}{2}$ erfüllt auch die sinnvolle Nebenbedingung $y \geq 0$).
Ertrag: $G(\frac{7}{2}) = E(0, \frac{7}{2}) = 124,5$.

c) Zunächst wird angenommenen, dass ein globales Maximum existiert, welches wir mit (x^*, y^*) bezeichnen.

Nun untersucht man $E(x^* + \Delta x, y^*)$:

Da (x^*, y^*) glob. Max. ist, gilt $E(x^* + \Delta x, y^*) = E(x, y^*) \geq E(x^*, y^*)$.
Wir wiederholen a) mit <u>konst.</u> Kunstdüngereinsatz $y = y^* = konst.$ und erhalten als notw. Bed.:
$\tilde{F}(x) := E(x, y^*) = -x^2 - 2y^{*^2} + xy^* + 7x + 14y^* + 100$
$\tilde{F}(x^*) \geq \tilde{F}(x) \Rightarrow x^*$ ist Lösung von $0 = \tilde{F}'(x^*)$ [NR: $\tilde{F}'(x) = -2x + y^* + 7$]
$\Rightarrow$ (I): $0 = -2x^* + y^* + 7$

Als nächstes wird $E(x^*, y^* + \Delta y)$ untersucht:

Da (x^*, y^*) glob. Max. ist, gilt $E(x^*, y^* + \Delta y) = E(x^*, y) \geq E(x^*, y^*)$
Wir wiederholen b) mit <u>konst.</u> organischem Dünger $x = x^* = konst.$ und erhalten als notw. Bed.:

$\tilde{G}(y) := E(x^*, y) = -{x^*}^2 - 2y^2 + x^*y + 7x^* + 14y + 100$
$\tilde{G}(y^*) \geq \tilde{G}(y) \Rightarrow y^*$ist Lösung von $0 = \tilde{G}'(y^*)$ [NR: $\tilde{G}'(y) = -4y + x^* + 14$]
$\Rightarrow$ (II): $0 = -4y^* + x^* + 14$

Für die unbekannte Optimallösung haben wir zwei affin-lineare Gleichungen gefunden, die simultan erfüllt sein müssen.

$$(I) : 0 = -2x^* + y^* + 7$$
$$(II) : 0 = -4y^* + x^* + 14$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems kann z.B. der Gaußalgorithmus verwendet werden:

(I) $\Rightarrow y^* = 2x^* - 7$ in (II) einsetzen
$\Rightarrow 0 = x^* - 4 * (2x^* - 7) + 14 = -7x^* + 28 + 14 = -7x^* + 42$
$\Rightarrow x^* = 6 \Rightarrow y^* = 2 * 6 - 7 = 5.$

Der Kandidat für das 2-dim. glob. Max ist $(x^*, y^*) = (6, 5)$.

Zu erwähnen ist noch, dass $\tilde{F}''(x^*) \leq 0$ und $\tilde{G}''(y^*) \leq 0$ notwendige Bedingungen für ein lok. Max. (x^*, y^*) sind.
Der global maximale Ertrag bei $(x^*, y^*) = (6, 5)$ beträgt 156.

		Ertrag E
a)	(3,5 / 0)	112,25
b)	(0 / 3,5)	124,5
c)	(6 / 5)	156
	(3,5 / 3,5)	149

Aufgabe 2: Wette (12 Punkte)

Verwende (i) und (ii): $180 = f(36) = f(1 \cdot 36) = \frac{1}{5} \cdot f(1) \cdot f(36) \Rightarrow f(1) = 5$
Zudem gilt: $f(n^2) = \frac{1}{5} \cdot f(n) \cdot f(n)$

$$\Rightarrow 180 = f(36) = \frac{1}{5} \cdot [f(6)]^2 \qquad\qquad \Rightarrow 900 = [f(6)]^2 \Rightarrow f(6) = \pm 30$$

Da $f(m) > f(n)$ für $m > n$ und $f(1) = 5$ folgt: $f(6) = 30 \Rightarrow$ f nimmt nur positive Werte an!
Betrage nun die Folge 6^k, $k \in \mathbb{N}$, dann folgt:
$f(6^k) = 5 \cdot 6^k$ (Eigenschaft (iii))
Wir wählen beliebig aufeinanderfolgende Potenzen von 6 und die natürlichen Zahlen dazwischen

$$6^k < 6^k + 1 < 6^k + 2 < \cdots < 6^{k+1} < 6^{k+1}$$

und zeigen, dass gilt:

$$f(6^k + i) = 5(6^k + i) = 5 * 6k + 5i.$$

Dies bedeutet, dass die gesuchte Funktion von der Form $f(n) = 5n$ ist.
Zwischen 6^k und 6^{k+1} gibt es $6^{k+1} - 6^k - 1 = 5 \cdot 6^k - 1$ natürliche Zahlen. Dann gilt für die

Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f(6^k) &< f(6^k+1) < f(6^k+2) < \cdots < f(6^{k+1}) \\ \Rightarrow 5 \cdot 6^k &< f(6^k+1) < f(6^k+2) < \cdots < 5 \cdot 6^{k+1} \end{aligned}$$

Zwischen $5 \cdot 6^k$ und $5 \cdot 6^{k+1}$ gibt es $5 \cdot 6^{k+1} - 5 \cdot 6^k - 1 = 25 \cdot 6^k - 1$ natürliche Zahlen, von denen $5 \cdot 6^k - 1$ durch 5 teilbar sind. Den $5 \cdot 6^k - 1$ natürlichen Zahlen zwischen 6^k und 6^{k+1} werden die $5 \cdot 6^k - 1$ Zahlen zwischen $f(6^k)$ und $f(6^{k+1})$ zugeordnet.
$\Rightarrow f(6^k + i) = 5 \cdot 6^k + 5i) \Rightarrow f(n) = 5n$.

Aufgabe 3: Primzahlpalindrom (14 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Schreibe die gesuchte Zahl als abc mit $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Hinweis 1: abc ist eine Primzahl $\Rightarrow c \neq 0, 2, 4, 6, 8$
$\Rightarrow c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ und $c \neq 5 \Rightarrow c \in \{1, 3, 7, 9\}$.

Hinweis 2: abc ist ein Zahlenpalindrom $\Rightarrow a = c$
$\Rightarrow a, c \in \{1, 3, 7, 9\} \Rightarrow b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Hinweis 3: Die Quersumme ist ein Palindrom:
$\Rightarrow a + b + c \in \{0, \cdots, 9, 11, 22\}$ (die größte Quersumme ist $3 \cdot 9 = 27$)
mit Hinweis 2 $\Rightarrow 2a+b \in \{0, \cdots, 9, 11, 22\}$, mit Hinweis 1 $\Rightarrow 2a+b \in \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 22\}$

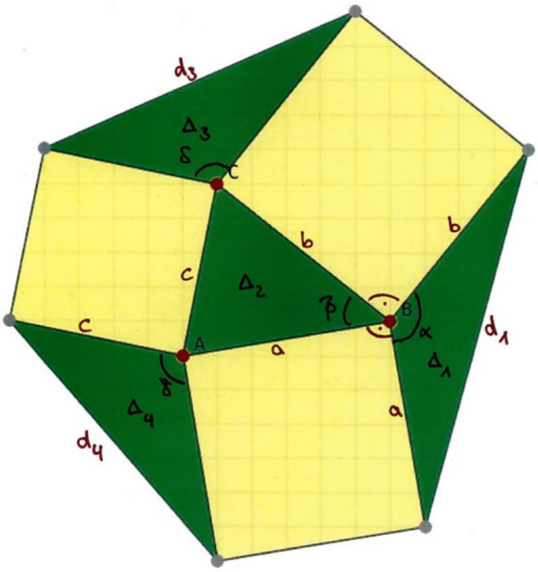
a = 1:	$2+b$	$=$	0	$\Rightarrow$	$b=-2$			Widerspruch
			1	$\Rightarrow$	$b=-1$			Widerspruch
			2	$\Rightarrow$	$b=0$	$\Rightarrow$	101	Prim
			4	$\Rightarrow$	$b=2$	$\Rightarrow$	121	teilbar durch 11
			5	$\Rightarrow$	$b=3$	$\Rightarrow$	131	Prim
			7	$\Rightarrow$	$b=5$	$\Rightarrow$	151	Prim
			8	$\Rightarrow$	$b=6$	$\Rightarrow$	161	teilbar durch 7
			11	$\Rightarrow$	$b=9$	$\Rightarrow$	191	Prim
			22	$\Rightarrow$	$b=20$			Widerspruch
a = 3:	$6+b$	$=$	0					
			1					Widerspruch
			2					Widerspruch
								Widerspruch
			4					Widerspruch
			5					Widerspruch
			7	$\Rightarrow$	$b=1$	$\Rightarrow$	313	Prim
			8	$\Rightarrow$	$b=2$	$\Rightarrow$	323	teilbar durch 17
			11	$\Rightarrow$	$b=5$	$\Rightarrow$	353	Prim
			22					Widerspruch
a = 7:	$14+b$	$=$	$0,\cdots,11$					Widerspruch
			22	$\Rightarrow$	$b=8$	$\Rightarrow$	787	Prim
a = 9:	$148+b$	$=$	$0,\cdots,11$					Widerspruch
			22	$\Rightarrow$	$b=4$	$\Rightarrow$	949	teilbar durch 13

$\Rightarrow$ Die möglichen Kombinationen sind: $101, 131, 151, 191, 313, 353, 787$

Da Max und Moritz insgesamt 7 bzw. mehr als 4 Kombinationen ausprobieren müssten, ist der Plan zu riskant und somit nicht durchführbar.

Aufgabe 4: Geometrie (6 Punkte)

zz: Die grünen Dreiecke sind flächengleich.



Nach dem Sinussatz gilt im Dreieck Δ_1:

$$\frac{d_1}{\sin(\alpha)} = \frac{abd_1}{2 \cdot F_{\Delta_1}} \Rightarrow F_{\Delta_1} = \frac{ab\sin(\alpha)}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \sin(\alpha)$$

Im Dreieck Δ_2 gilt:

$$\frac{c}{\sin(\beta)} = \frac{abc}{2 \cdot F_{\Delta_2}} \Rightarrow F_{\Delta_2} = \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \sin(\beta)$$

Es gilt:

$$\beta = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \sin(\beta) = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$\Rightarrow F_{\Delta_1} = \frac{ab}{2} \cdot \sin(\alpha) = F_{\Delta_2}$

Analog folgt in den anderen Dreiecken:
$F_{\Delta_3} = \frac{cb}{2} \cdot \sin(\delta) = F_{\Delta_2}$ $F_{\Delta_4} = \frac{ac}{2} \cdot \sin(\gamma) = F_{\Delta_2}$

$\Rightarrow F_{\Delta_1} = F_{\Delta_2} = F_{\Delta_3} = F_{\Delta_4}$

Aufgabe 5: Schüleraustausch II (6 Punkte)

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass Christina in eine Familie mit mindestens einem Mädchen kommt. Die Wahrscheinlichkeit in eine Familie mit den teilnehmenden Mädchen zu kommen beträgt $\frac{1}{2}$. Im Folgenden stehe M für Mädchen und J für Junge.

- 3 der 5 Jungen haben einen Bruder oder eine Schwester
  $\Rightarrow$ Von den Vier Möglichkeiten JJ, MJ, JM, MM bleiben nur die beiden Möglichkeiten MJ, JM übrig.

- 1 der 5 Jungen hat 2 Geschwister
  $\Rightarrow$ von den acht Möglichkeiten JJJ, JMM, JMJ, MJJ, MJM, MMJ, JJM, MMM bleiben die sechs Möglichkeiten JMM, JMJ, MJJ, MJM, MMJ, JJM übrig.

Insgesamt folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit p:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{4} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{20}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{20} = \frac{29}{40} = 72,5\%
\end{aligned}
$$

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!