Klassenstufe 9-10 / Lösungsvorschläge

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1: Primzahlpalindrom (14 Punkte)

Schreibe die gesuchte Zahl als abc mit a,b,c $\in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Hinweis 1: abc ist eine Primzahl
$\Rightarrow c \neq 0,2,4,6,8$
$\Rightarrow c \in \{1,3,5,7,9\}$
und $c \neq 5 \Rightarrow c \in \{1,3,7,9\}$

Hinweis 2: abc ist ein Zahlenpalindrom
$\Rightarrow a = c \Rightarrow a \in \{1,3,7,9\}$
$\Rightarrow b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Hinweis 3: Die Quersumme ist ein zweistelliges Palindrom.
$\Rightarrow a+b+c \in \{11,22\}$ (die größte Quersumme ist $3 \cdot 9 = 27$).

Mit Hinweis 2 folgt: (I) $2 \cdot a + b = 11$ oder (II) $2 \cdot a + b = 22$

I) $2 \cdot a + b = 11$

$$\begin{array}{llllll} a=1 & \Rightarrow & 2+b=11 & \Rightarrow & b=9 \\ a=3 & \Rightarrow & 6+b=11 & \Rightarrow & b=5 \\ a=7 & \Rightarrow & 14+b=11 & \Rightarrow & b=-3 \\ a=9 & \Rightarrow & 18+b=11 & \Rightarrow & b=-7 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1. Kombination: 191, 2. Kombination: 353 (beides Primzahlen!)

II) $2 \cdot a + b = 22$

$$\begin{array}{llllll} a=1 & \Rightarrow & 2+b=22 & \Rightarrow & b=20 \\ a=3 & \Rightarrow & 6+b=22 & \Rightarrow & b=16 \\ a=7 & \Rightarrow & 14+b=22 & \Rightarrow & b=8 \\ a=9 & \Rightarrow & 18+b=22 & \Rightarrow & b=4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 3. Kombination: 787 (Primzahl!) ; 949 ist keine mögliche Kombination, da $949 : 13 = 73$

Da Max und Moritz 3 Kombinationen ausprobieren müssen, ist der Plan nicht durchführbar.

Aufgabe 2: Schließfächer (8 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Ein Schließfach ist offen (Abkürzung: o), falls die Anzahl der Öffnungen und Schließungen ungerade ist. Ist diese Anzahl gerade, so ist das Schließfach geschlossen (Abkürzung: g).

Schließfachnummer	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Anzahl der Öffnungen und Schließungen	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
Klassifikation	o	g	g	o	g	g	g	g	o	g

Schließfachnummer	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl der Öffnungen und Schließungen	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
Klassifikation	g	g	g	g	g	o	g	g	g	g

Schließfachnummer	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Anzahl der Öffnungen und Schließungen	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
Klassifikation	g	g	g	g	o	g	g	g	g	g

Schließfachnummer	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Anzahl der Öffnungen und Schließungen	2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
Klassifikation	g	g	g	g	g	o	g	g	g	g

Schließfachnummer	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Anzahl der Öffnungen und Schließungen	2	8	2	6	6	4	2	10	3	6
Klassifikation	g	g	g	g	g	g	g	g	o	g

Nach dem 50. Durchgang sind die sieben Fächer mit den Nummern 1,4,9,16,25,36 und 49 offen.

Aufgabe 3: Die Drei Zinnen (6 Punkte)

Wander - Gruppe:
$v = \frac{x}{t}$, v: Geschwindigkeit, t: Zeit, x: Strecke
$t_{ges} = 4h$, $t = \frac{x}{v}$

I) $\frac{x_1}{4km/h} + \frac{x_2}{3km/h} + \frac{x_2}{6km/h} + \frac{x_1}{4km/h} = 3,5h$

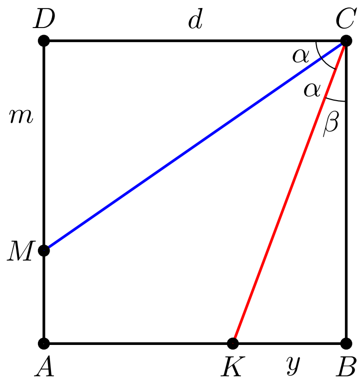
II) $\frac{x_5}{6km/h} = 0,5h \Rightarrow x_5 = 3km$ (letzte halbe Stunde)

Weiter mit (1):
$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 = 12km/h \cdot 3,5h$
$\Rightarrow 6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 12km/h \cdot 3,5h$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = 7km = x_{Teil1}$
$\Rightarrow x_{Teil2} = x_{Teil1} + x_5 = 10km \Rightarrow x_{ges} = x_{Teil1} + x_{Teil2} = 17km$

Bergsteiger - Gruppe:
Die Bergsteiger-Gruppe spart sich 2 km $\Rightarrow y_{ges} = 15km$
Rast auf halber Strecke: $y_1 = 7,5km$, $y_2 = 7,5km$
$t_1 = \frac{y_1}{2km/h} = \frac{7{,}5km}{2km/h} = 3,75h$
$t_2 = \frac{7{,}5km}{6km/h} = 1,25h$
$\Rightarrow t_{Rast} = t_{ges} - t_1 - t_2 = 4h - 3,75h - 1,25h = -1h$

Die Bergsteiger-Gruppe darf keine Rast einlegen, da sie bei einer Geschwindigkeit von $6km/h$ auf der zweiten Hälfte 1 Stunde länger brauchen als die Wander-Gruppe. Die Bergsteiger hätten auf ihrer 1. Etappe schneller sein müssen, um überhaupt rasten zu dürfen!

Aufgabe 4: Geometrie (6 Punkte)



Es ist zu zeigen: $m + y = x$, wobei $m = \overline{DM}$, $y = \overline{KB}$, $x = \overline{KC}$
$\beta = 90° - 2\alpha \Rightarrow \sin(\beta) = \cos(90° - 2\alpha) = \sin(2\alpha)$

$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= \frac{d}{x} \Rightarrow x = \frac{d}{\cos(\beta)} = \frac{d}{\sin(2\alpha)} \\
\tan(\beta) &= \frac{y}{d} \Rightarrow y = d \cdot \tan(\beta) \\
\tan(\alpha) &= \frac{m}{d} \Rightarrow m = d \cdot \tan(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow m + y &= d \cdot \tan(\beta) + d \cdot \tan(\alpha) \\
&= d\left(\frac{\sin(90° - 2\alpha)}{\cos(90° - 2\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) \\
&= d\left(\frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) \\
&= d\left(\frac{(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\cos(\alpha) + 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)}\right) \\
&= d\left(\frac{\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)}\right) = d\left(\frac{1}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}\right) = \frac{d}{\sin(2\alpha)} = x
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Gleichungssystem (8 Punkte)

$$x^2 = z + xy + 70 \tag{1}$$
$$y^2 = xy - z + 11 \tag{2}$$
$$z^2 = x - y \tag{3}$$

Gesucht sind alle möglichen Werte von $x + y$:

(1) + (2) liefert: $x^2 + y^2 = 2xy + 81$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & x^2 - 2xy + y^2 & = 81 \\ \Rightarrow & (x-y)^2 & = 81 \\ \Rightarrow & x - y & = 9 \quad \text{oder} \quad x - y = -9 \end{array}$$

Aus $z^2 = x - y$ folgt:
$z^2 = 9$ oder $z^2 = -9$ (aber dies ist nicht möglich, da $z \in \mathbb{R}$)
$\Rightarrow z_{1,2} = \pm 3$

In den Gleichungen (1) und (2) folgt:
Fall 1: $z = 3$
(1)': $x^2 = xy + 73$ und (2)': $y^2 = xy + 8$
mit (1)' - (2)' folgt:
$x^2 - y^2 = 65 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 65 \Rightarrow x + y = \frac{65}{9}$
Fall 2: $z = -3$
(1)": $x^2 = xy + 67$ und (2)": $y^2 = xy + 14$
mit (1)" - (2)" folgt:
$x^2 - y^2 = 53 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 53 \Rightarrow x + y = \frac{53}{9}$

Aufgabe 6: Schüleraustausch (6 Punkte)

Christina liegt falsch, wenn sie von einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ ausgeht.
Um auf die richtige Lösung zu kommen, muss man sich überlegen, welche Geschwisterpaarungen grundsätzlich möglich sind.
Steht M für Mädchen und J für Junge, so gibt es bei zwei Geschwistern die vier Möglichkeiten: MM, MJ, JM, JJ.
Diese vier Möglichkeiten haben dieselbe Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$.
Da Christina durch den Organisator die Information erhalten hat, dass mindestes eines der Geschwister ein Mädchen ist, bleiben noch drei Möglichkeiten übrig: MM, MJ, JM (wieder mit gleicher Wahrscheinlichkeit).
Aus Sicht von Christina beträgt nun die Wahrscheinlichkeit auf zwei Mädchen zu treffen $\frac{1}{3}$ und auf ein Mädchen und einen Jungen zu treffen $\frac{2}{3}$.

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!