Klassenstufe 7-8 / Lösungsvorschläge

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1: Gutscheine (10 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Ein 10€ Gutschein liefert bei einem Einkauf von 60€ einen Rabatt von

$$\frac{10}{60} = \frac{1}{6} \approx 16,7\% < 20\%.$$

Bei einem höheren Einkauf ist der Rabatt noch kleiner!
Der 5 € Gutschein liefert nur beim T-Shirt eine höhere Ersparnis als der 20% Coupon:

$$5€ \text{ Gutschein: } 15€ - 5€ = 10€, \quad 20\% \text{ Coupon: } 15€ - 0,2 \cdot 15€ = 12€.$$

$\Rightarrow$ Einer der beiden Söhne geht mit dem T-Shirt und dem 5€ Gutschein zur Kasse.
Die restlichen Kleidungsstücke werden auf den 20% Coupon und den Hosen-Gutschein aufgeteilt:

- Für den Badeanzug und das Kleid kann der Hosen-Gutschein nicht verwendet werden.
  $\Rightarrow$ 20% Coupon für das Kleid und den Badeanzug.
  Kleid: $50€ - 0,2 \cdot 50€ = 40€$
  Badeanzug: $88€ - 0,2 \cdot 88€ = 70,40€$

- Die beiden sinnvollen Kombinationen für den Hosen-Gutschein sind: A,C,D oder A,B,C. Wird für die jeweils ausgeschlossene Hose (B bzw. D) der 20% Coupon verwendet, so folgt für die Summen in den beiden Fällen:
  A,C,D: $78€ + 44€ + 35€ - 0,2 \cdot 35€ = 150€$
  A,B,C: $44€ + 43€ + 75€ - 0,2 \cdot 78€ = 148,40€$
  Die Kosten im Fall A,B,C sind geringer.

$\Rightarrow$ Papa Max wird mit den Hosen A,B,C und dem Hosen-Gutschein zur Kasse geschickt.
$\Rightarrow$ Mama Inge wird mit Hose D, dem Kleid, dem Badeanzug und dem 20% Coupon zur Kasse geschickt.

Bonusfrage: Da in obigem Fall nur 3 Familienmitglieder zur Kasse gehen, erhält Anne 2 Kugeln Eis.

Aufgabe 2: Hugo, das Schlossgespenst (8 Punkte)

Der große Zeiger legt pro Minute 6° zurück (= 360° / 60 min). Sei nun m die Anzahl der Minuten, die nach 01:00 Uhr vergangen sind.
Für die in Grad gemessene Position des großen Zeigers gilt:

$$P_{groß} = 30^\circ + 0,5^\circ/\text{min} \cdot m.$$

Die Geschwindigkeit des kleinen Zeigers liegt bei 0,5 Grad pro Minute. Denn in einer Stunde dreht sich der kleine Zeiger um 30° (= 360° / 12) - das ergibt $\frac{30}{60} = 0,5$ Grad pro Minute.
Für die Position des Zeigers zum Zeitpunkt m Minuten nach 01:00 Uhr gilt:

$$P_{klein} = 30^\circ + 0,5^\circ/\text{min} \cdot m.$$

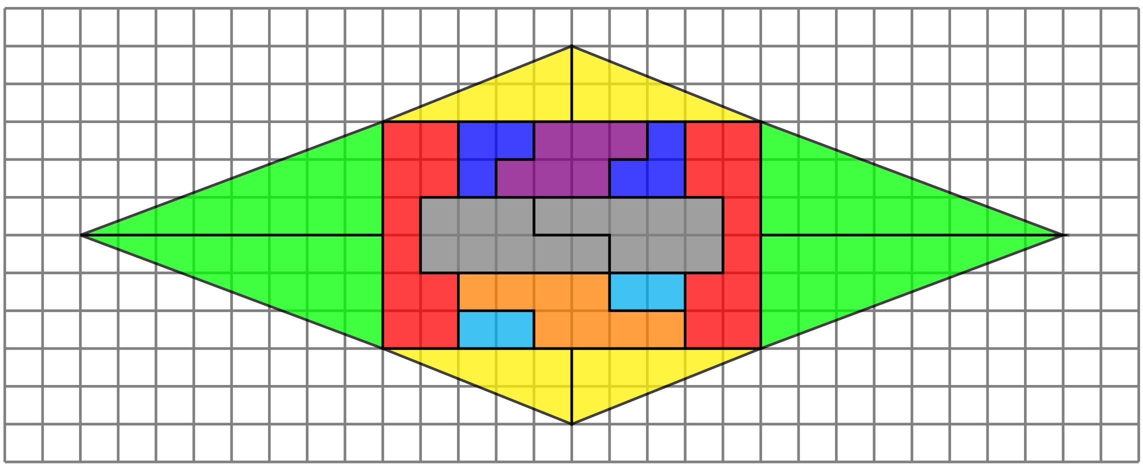
Wir suchen den Moment, in dem beide Positionen gleich sind und setzen daher beide Ausdrücke gleich:

$$\begin{aligned} 6^\circ/\text{min} \cdot m &= 30^\circ + 0,5^\circ/\text{min} \cdot m \\ \Rightarrow 12^\circ/\text{min} \cdot m &= 60^\circ + 1^\circ/\text{min} \cdot m \\ \Rightarrow 11^\circ/\text{min} \cdot m &= 60^\circ \\ \Rightarrow m &= \frac{60}{11}\text{min.} \end{aligned}$$

$\frac{60}{11}$ min sind ungefähr 5,45 min. Dies entspricht 5 Minuten und 27,3 Sekunden.
Daher hat das Schlossgespenst Hugo seinen nächsten Auftritt um 01:05:27 Uhr.

Aufgabe 3: Bausteine (6 Punkte)

a) z.B.



b) Bei der neuen Figur gibt es keine Anordnung, sodass die Fläche im Inneren der Figur komplett ausgefüllt ist. Es entstehen immer Löcher.

Dies kann man nach der Berechnung der Differenz beider Flächeninhalte sehen:

$$\begin{aligned} F_a &= 4 \cdot F_{\Delta_{groß}} + 4 \cdot F_{\Delta_{klein}} + F_{\Box_a}, & F_{\Box_a} &= 5 \cdot 3 = 15 \\ F_b &= 4 \cdot F_{\Delta_{groß}} + 4 \cdot F_{\Delta_{klein}} + F_{\Box_b}, & F_{\Box_b} &= 8 \cdot 2 = 16 \\ &\Rightarrow |F_b - F_a| = |16 - 15| = 1 \end{aligned}$$

Der Grund für den Unterschied in den Flächeninhalten liegt darin, dass das große und das kleine Dreicheck nicht eine Linie bilden. Es liegt in beiden Figuren ein Knick - jeweils in den Übergängen der Dreiecke - vor! In Figur a) geht der Knick nach innen, in Figur b) nach außen.

Aufgabe 4: Limonade (12 Punkte)

a) Es bezeichne w die Menge an Wasser in Liter und z die Menge an Zitronensaft in Liter. $\Rightarrow w + z = 10l$.
in Anteilen: $\frac{w}{10l} + \frac{z}{10l} = 1$
Nun werden $5l$ Wasser hinzugefügt.
$\Rightarrow \tilde{w} + z = 15l$, wobei $\tilde{w} = w + 5l$
in Anteilen: $\frac{\tilde{w}}{15l} + \frac{z}{15l} = 1$
$\Rightarrow$ Neuer Anteil an Zitronensaft: $\frac{z}{15l}$
Alter Anteil an Zitronensaft: $\frac{z}{10l}$
Behauptung von Paul: $10\% \cdot \frac{z}{10l} = \frac{z}{15l}$
$\Rightarrow \frac{1}{10} \cdot \frac{z}{10l} = \frac{z}{100l} \neq \frac{z}{15l} \Rightarrow$ Paul kann nicht Recht haben!
Behauptung von Luca: Die neue Limonade enthält 10% an Zitronensaft.
$\Rightarrow \frac{z}{15l} = 10\%$ und $\frac{\tilde{w}}{15l} = 90\%$.
$\Rightarrow z = \frac{1}{10} \cdot 15l = 1,5l, \quad \tilde{w} = \frac{9}{10} \cdot 15l = 13,5l.$

b) Es bezeichne m die Menge an Wasser, welche hinzugefügt werden soll.
$\Rightarrow (w + m) + z = 10l + m$
in Anteilen: $\frac{w+m}{10l+m} + \frac{z}{10l+m} = 1$
Neuer Anteil an Zitronensaft: $\frac{z}{10l+m}$
Alter Anteil an Zitronensaft: $\frac{z}{10l}$
Es soll gelten: $50\% \cdot \frac{z}{10l} = \frac{z}{10l+m}$
$\Rightarrow \frac{z}{20l} \cdot (10l + m) = z$
$\Rightarrow 10l + m = 20l \Rightarrow m = 10l$
Um den geforderten Anteil an Zitronensaft zu erhalten, müssen 10l Mineralwasser hinzugefügt werden.

Aufgabe 5: Wiegen (6 Punkte)

Es reicht zweimal zu wiegen.
Vorgehen:
Zuerst teilen wir die 9 Kugeln in 3 Gruppen mit jeweils 3 Kugeln auf. Die drei Gruppen benennen wir mit A, B und C.
Zuerst werden A und B gegeneinander gewogen. Die schwerere Kugel befindet sich in der Gruppe, die auf der Balkenwaage nach unten geht. Sollten die beiden Gruppen im Gleichgewicht sein, so befindet sich die schwerere Kugel in Gruppe C. Wir wählen nun die schwerere Gruppe aus und wiegen zwei Kugeln dieser Gruppe gegeneinander. Falls sich beide Kugeln

im Gleichgewicht befinden, so ist die dritte, verbliebene Kugel die schwerere. Ansonsten ist diejenige Kugel die Gesuchte, bei der die Balkenwaage nach unten ausschlägt.

Aufgabe 6: Geometrie (6 Punkte)

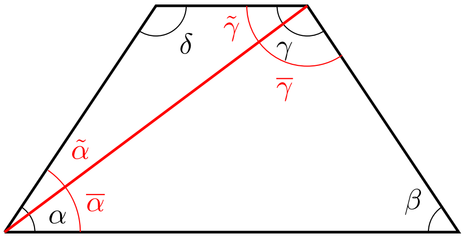


Abbildung: Gleichschenkliges Trapez

gleichschenkliges Trapez $\Rightarrow \alpha = \beta$, $\delta = \gamma$
Es müssen drei Fälle unterschieden werden:

I) $\bar{\alpha} = \bar{\gamma}$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\gamma}$
$\Rightarrow \bar{\alpha} + \tilde{\alpha} = \alpha = \beta \Rightarrow \bar{\gamma} + \tilde{\gamma} = \beta \Rightarrow \delta = \beta \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta$
$\Rightarrow 4a = 360° \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$

II) $\beta = \bar{\gamma}$, $\delta = \tilde{\alpha}$
$\Rightarrow \alpha = \bar{\gamma}$, $\gamma = \tilde{\alpha}$

$$180° = \bar{\alpha} + \beta + \bar{\gamma} = \bar{\alpha} + 2\bar{\gamma} \quad (1)$$
$$360° = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \bar{\gamma} + \bar{\gamma} + \bar{\gamma} + \tilde{\gamma} + \bar{\gamma} + \tilde{\gamma} = 4\bar{\gamma} + 2\tilde{\gamma} \quad (2)$$
$$\Rightarrow 180° = 2\bar{\gamma} + \tilde{\gamma} \quad (3)$$

aus (1) - (3) $\Longrightarrow \bar{\alpha} = \tilde{\gamma}$
$\alpha = \bar{\alpha} + \tilde{\alpha} \Rightarrow \bar{\gamma} = \tilde{\gamma} + \gamma \Rightarrow \gamma = \bar{\gamma} - \tilde{\gamma}$ aber das ist ein Widerspruch zu $\gamma = \bar{\gamma} + \tilde{\gamma}$

III) $\beta = \bar{\gamma}$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\gamma}$

$$360° = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 4\bar{\gamma} + 2\tilde{\gamma} \quad (4)$$
$$\Rightarrow 180° = 2\bar{\gamma} + \tilde{\gamma} \quad (5)$$
$$180° = \bar{\alpha} + 2\bar{\gamma} \quad (6)$$

aus (4) - (6) $\Longrightarrow \bar{\alpha} = \tilde{\gamma}$ $\alpha = \bar{\alpha} + \tilde{\alpha} = 2\tilde{\gamma} \Rightarrow \bar{\gamma} = 2\tilde{\gamma}$
$\Rightarrow 360° = 2\tilde{\gamma} + 2\tilde{\gamma} + 2\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} + 2\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} = 10\tilde{\gamma}$
$\Rightarrow 360° = 10\tilde{\gamma} \Rightarrow \tilde{\gamma} = 30° \Rightarrow \bar{\gamma} = 72° \Rightarrow \delta = \gamma = 108°$, $\alpha = \beta = 72°$
(Die Fälle $\beta = \bar{\alpha}$ bzw. $\delta = \tilde{\gamma}$ machen keinen Sinn, da $\beta = \alpha$ bzw. $\delta = \gamma$).

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!