

Klassenstufe 9-10

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1: Primzahlpalindrom (14 Punkte)

Die Schüler Max und Moritz wollen ihrem Fahrrad begeisterten Mathelehrer einen kleinen Streich spielen. Sie planen das heißgeliebte Fahrrad des Lehrers zu verstecken. Leider müssen die beiden Schüler dafür erstmal das dreistellige Fahrradschloss mit den Ziffern von 0,...,9 knacken. Das erweist sich als schwieriger als gedacht. Max und Moritz wissen nur soviel:

1. Die gesuchte Zahl ist eine Primzahl.
2. Die gesuchte Zahl ist ein Zahlenpalindrom.
3. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist ein zweistelliges Palindrom.

Als weitere Schwierigkeit kommt hinzu, dass sie nicht viel Zeit haben das Fahrrad zu verstecken. Sie schätzen, dass sie höchstens zwei Kombinationen ausprobieren können. Entscheiden Sie, ob der Plan durchführbar ist und geben Sie die möglichen Kombinationen an.

Hinweis: Ein Zahlenpalindrom ist eine Zahl, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich ist.

Aufgabe 2: Schließfächer (8 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Die Sommerferien haben begonnen. Der etwas komische Hausmeister steht vor den 50 nebeneinander angeordneten Schließfächern in der Schule, die sämtlich geschlossen sind. Heute hat der Hausmeister einen Schlüsselbund mit allen 50 Schlüsseln und er wird genau fünfzigmal an den Schließfächern vorbeigehen und dabei manche öffnen oder schließen.

Beim ersten Durchgang öffnet er alle Fächer.

Beim zweiten Durchgang geht der Hausmeister zu jedem zweiten Fach und wechselt deren Zustand. Das heißt: Ist es geschlossen, wird es geöffnet. Ist es bereits offen, wird es geschlossen. Im konkreten Fall schließt er also die Fächer 2, 4, 6, ..., 48 und 50, weil vorher ja alle Türen offen standen.

Beim dritten Durchgang ändert er den Zustand jedes dritten Faches – also 3, 6, 9, ..., 45, 48. Geschlossene Türen öffnet er, geöffnete schließt er.

Beim vierten Durchgang geht es um jedes vierte Fach, beim fünften um jedes fünfte - und so weiter. Beim letzten, dem 50. Durchgang ändert der Hausmeister schließlich nur den Zustand der Tür Nummer 50.

Die Frage lautet: Wie viele der 50 Fächer stehen nach dem 50. Durchgang offen? Genaue Begründung bzw. Rechnung angeben!

Bonusfrage: Welche Fächer stehen nach dem 50. Durchgang offen?

Aufgabe 3: Die Drei Zinnen (6 Punkte)

Die 10. Klasse eines oberfränkischen Gymnasiums befindet sich auf einer Erdkunde-Exkursion in den Dolomiten. Bei einer Wanderung im Pustertal kommen sie an ein Bergmassiv. Da einer der Lehrer ein leidenschaftlicher Bergsteiger ist, beschließen sie sich in eine Bergsteiger-Gruppe und in eine Wander-Gruppe aufzuteilen. Die Bergsteiger nehmen die Route über das Massiv, um die berühmten Drei Zinnen, siehe Abbildung 1, aus der Nähe zu betrachten und um sich 2 km an Strecke zu sparen. Über die steilen und felsigen



Abbildung 1: Die Drei Zinnen

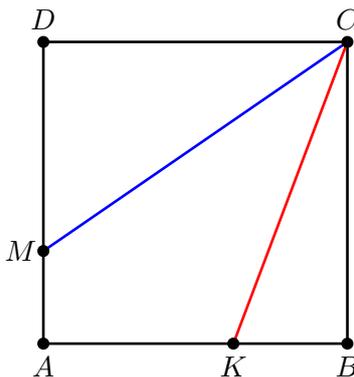
Passagen können sie nur eine Geschwindigkeit von 2 km/h halten. Wegen der großen Anstrengung müssen sie allerdings auf halber Strecke bei der Schutzhütte der Drei Zinnen eine Rast einlegen.

Die andere Gruppe geht das Ganze etwas gemütlicher an. Zuerst gehen Sie auf ebenen Pfaden mit 4 km/h los und anschließend mit 3 km/h bergauf. Danach wandern sie dieselbe Strecke zunächst mit 6 km/h bergab und danach wieder mit 4 km/h die Ebene entlang. In der letzten halben Stunde wollen sie nochmal schneller gehen, um vor den Bergsteigern am Ziel zu sein. Dabei kommen sie auf eine Geschwindigkeit von 6 km/h. Berechnen Sie die gesamte Wanderstrecke, wenn die Wander-Gruppe 4 Stunden unterwegs war. Wie lange darf die Bergsteiger-Gruppe höchstens rasten, wenn sie mit einer Geschwindigkeit von 6 km/h, noch vor der Wandergruppe im Ziel sein will? (Falls möglich!)

Aufgabe 4: Geometrie (6 Punkte)

Betrachten Sie das Quadrat $ABCD$. K ist ein beliebiger Punkt auf $[AB]$.

MC ist die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle DCK$. Zeigen Sie: $\overline{DM} + \overline{KB} = \overline{KC}$



Hinweis: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ und $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Aufgabe 5: Gleichungssystem (8 Punkte)

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$x^2 = z + xy + 70$$

$$y^2 = xy - z + 11$$

$$z^2 = x - y$$

wobei x, y, z reelle Zahlen sind. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von $x + y$.

Aufgabe 6: Schüleraustausch (6 Punkte)

Christina freut sich auf ihr Jahr als Austauschschülerin. Der Austausch findet mit der französischen Stadt Annecy, einer von Bayreuths Partnerstädten, statt.



Abbildung 2: Stadtteil von Annecy am Abend

Durch den Organisator des Schüleraustausches weiß sie, dass sie in eine Familie mit zwei Geschwistern kommt, von denen mindestens eins ein Mädchen ist. Mit Hilfe dieser Information denkt Christina kurz nach: Geht man davon aus, dass in etwa genauso viele Jungen wie Mädchen geboren werden, dürften ihre Chancen ungefähr bei $\frac{1}{2}$ stehen, auf zwei Mädchen zu treffen.

Aber stimmt das auch? Und falls nicht: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit stattdessen?

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!