Klassenstufe 9-10

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1: Korrekteure beim Tag der Mathematik

Natürlich gibt es für die freiwilligen Korrekteure am Tag der Mathematik eine Verpflegung in Form von Aprikosen. Nach dem Korrigieren der Wettbewerbsaufgaben beim Tag der Mathematik für die Klassen 9/10 im Jahr 2012 werden die übrig gebliebenen Aprikosen gerecht unter den Korrekteuren aufgeteilt. Diese Aufteilung funktioniert ohne Rest. „Wären wir zwei Korrekteure weniger gewesen, hätte jeder genau eine Aprikose mehr bekommen“, stellt Sandra traurig fest. „Stimmt“ meint Sascha, „und bei drei Korrekteuren weniger hätte es sogar exakt für zwei Aprikosen mehr gereicht.“ Sandra bemerkt dazu: „Dann wären wir aber nicht rechtzeitig vor der Preisverleihung fertig geworden!“

Wie viele Korrekteure waren es?

Lösungsvorschlag:

h =Anzahl der Helfer (Korrekteure)
A =Gesamtanzahl der zu verteilenden Aprikosen
c =tatsächliche Anzahl Aprikosen, die jeder Helfer bekommen hat.

Angabe:

$$\begin{array}{lrcll} & h \cdot c & = & A & \text{mit } h, c, A \in \{1, 2, 3 \ldots\} \\ \text{und} & (h-2) \cdot (c+1) & = & A & \text{und } h \geq 3 \\ \text{und} & (h-3) \cdot (c+2) & = & A & \text{und } h \geq 4 \end{array}$$

Gesucht ist h.

$$A = hc \quad (1)$$
$$A = hc + h - 2c - 2 \quad (2)$$
$$A = hc + 2h - 3c - 6 \quad (3)$$

Vereinfache:

$$(4) = (2) - (1) \quad : \quad 0 = h - 2c - 2$$
$$(5) = (3) - (1) \quad : \quad 0 = 2h - 3c - 6$$

Ziel, löse nach h auf, eliminiere also c:

$$3 \cdot (4) - 2 \cdot (5) \quad : \quad 0 = 3(h - 2c - 2) - 2(2h - 3c - 6) = -h + 6$$

Also Lösung: $\boxed{h = 6}$ Korrekteure.

Probe: Aus (4) berechnet sich $c = 2$. Aus (1) berechnet sich $A = 12$.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 12 = A & = & 6 \cdot 2 = hc \\ (2) & 12 = A & = & 4 \cdot 3 = (h-2) \cdot (c+1) \\ (3) & 12 = A & = & 3 \cdot 4 = (h-3) \cdot (c+2) \end{array}$$

Alles erfüllt!

Aufgabe 2: Zahlenrätsel

Für die positiven reellen Zahlen a, b, c, d und e sollen folgende Gleichungen gelten:
$ab = 4$, $bc = 13$, $cd = 25$, $de = 2018$.

Dann ist $\frac{e}{a} =?$

Lösungsvorschlag:

$$\frac{e}{a} = \frac{(bc)(de)}{(ab)(cd)} = \frac{13 \cdot 2018}{4 \cdot 25} = \frac{26234}{100} = 262,34$$

Aufgabe 3: Der Schulfreund

Konrad besucht nach langer Zeit erstmals wieder seinen Schulfreund Peter und seine Frau Marlies, die jetzt in Pretzfeld leben. Sie sprechen über alte Zeiten und er sieht im hintersten Teil des riesigen Gartens vage hinter einer Kirschbaumplantage die drei Töchter von Peter spielen.

Er frägt: „Wie alt sind Deine Töchter eigentlich?“

Peter – in Mathe immer super drauf – antwortet *wie zu Schulzeiten* in einem Rätsel: „Wenn du das Alter aller meiner Töchter zusammen multiplizierst erhältst Du 36.“

„Das genügt mir noch nicht“, stellt Konrad sofort fest.

„Naja, wenn du das Alter aller meiner Töchter zusammen addierst, wirst Du feststellen, dass es mit der Anzahl der Mathematikbücher auf dem Wohnzimmerschrank übereinstimmt.“

Konrad zählt sorgfältig die Bücher und stellt fest, das ihm immer noch eine Angabe fehlt. Im anschließenden Gespräch erwähnt Peter freudestrahlend, „die Jüngste macht gerade ihre ersten Laufversuche.“

Da platzt Konrad heraus: „Toll, dann weiß ich jetzt, wie alt deine Töchter sind.“

Wie alt sind die Töchter? Erklären Sie auch, woher Konrad wusste, wie alt die Töchter sind.

Lösungsvorschlag:

Wir nennen das Alter des jüngsten Tochter a, der mittleren Tochter b und der ältesten Tochter c; genauer vereinbaren wir $\boxed{a \leq b \leq c}$. (Es könnte ja auch Zwillinge bzw. Drillinge geben ...!)

Es gilt ja $4 \cdot 9 = 6^2 = 36$. Man kann 36 auf verschiedene Weise in das Produkt „dreier“ (positiver ganzzahliger) Faktoren zerlegen. Hilfreich ist dazu die Primfaktorzerlegung $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ bzw. noch besser $36 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Ausserdem ist die Summe gleich der Anzahl der Mathematikbücher im Wohnzimmerschrank.

abc	a	b	c	$a+b+c$
36	1	1	36	38
36	1	2	18	21
36	1	3	12	16
36	1	4	9	14
36	1	6	6	*13*
36	2	2	9	*13*
36	2	3	6	11
36	3	3	4	10

Bei der Anzahl $a + b + c$ (der Anzahl der Mathematikbücher im Wohnzimmerschrank) gibt es einzig bei der Summe 13 *(zwei) verschiedene* Möglichkeiten für die entsprechenden Alter der Töchter.

Also muss es 13 Mathematikbücher im Wohnzimmerschrank geben. (Konrad konnte aus der Anzahl der Mathematikbücher das Alter der Töchter noch nicht bestimmen.)

Die Zusatzinformation des „Mathematikers“ Peter:

<u>die</u> Jüngste ...

liefert uns die Information, dass es <u>nicht</u> mehrere gleichaltrige jüngste Töchter gibt, also $a \neq b$, bzw. genauer $a < b$.

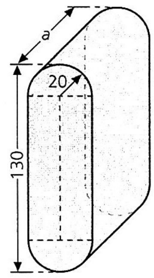
Damit bleibt die einzige Lösung: $a = 1 < b = 6 \leq c = 6$ (Alter der drei Töchter).

Aufgabe 4: Öltank

Der abgebildete Öltank hat ein Volumen von 1000 Litern.

a) Berechne die Länge a.
Hinweis: Rechne in m und runde alle Ergebnisse, auch die Zwischenergebnisse, auf zwei Dezimalstellen. Die Angaben in der Figur sind Innenmasse in cm. Rechne mit $\pi \approx 3,14$.

b) Wie schwer ist der leere Tank? Rechne mit einer Wandstärke von 0,5 cm und einer Materialdichte von 8 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.



Öltank

Lösungsidee:
a) Volumen(Tank) = Volumen(Quader) + $2 \cdot \frac{1}{2}$ Volumen(gerader Kreis-Zylinder)
$(\dots)$ $\quad a = 2,04$ m
b) Weg 1: Oberfläche · Dicke · Dichte = 288 kg
Weg 2: Berechne zusaetzlich analog zu a) das Aussenvolumen.
Aussenvolumen - Innenvolumen aus a) = Volumen der Wand.
Anschliessend mit der Dichte multiplizieren ergibt 240 kg.
Beide Lösungswege/Algorithmen ergeben ein sehr unterschiedliches Ergebnis. Es ist Auslöschung bei der Differenz von Aussenvolumen und Innenvolumen aufgetreten. Dies wird im 3. Semester des Mathematik Studiums in der Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik erklärt. Eine einfache Abhilfe für den Praktiker. Alle Zwischenergebnisse mit voller Taschenrechner-Genauigkeit auswerten und erst beim Endergebnis runden!

Aufgabe 5: Wanderung am Goldsteig

Eine Wandergruppe aus Trier macht Urlaub in Bayern. Sie treffen sich zum Wandern auf dem bekannten Fernwanderweg Goldsteig, welcher durch den Oberpfälzer Wald und den Bayerischen Wald führt. Gleich auf der ersten Etappe kommen sie vom Weg ab. Nach vergeblichen Umherirren gelangen sie wieder auf einen Waldweg ohne zu wissen, wo sie sind. An einer Weggabelung treffen sie auf die drei befreundeten Pilzsammler Wolfgang, Ludwig und Franz. Aus dem Gasthof, an dem sie am Abend zuvor gegessen haben, wissen sie, dass einer von ihnen immer die Wahrheit sagt, einer immer lügt und der dritte bei jeder an ihn gestellten Frage unvorhersehbar (je nach sekündlicher Laune) mal die Wahrheit sagt und mal lügt. Allerdings weiß die Wandergruppe leider nicht wer der jeweilige Pilzsammler ist. Die drei Pilzsammler wollen der Gruppe jedoch helfen den Weg ins nächste Dorf zu finden.

Dabei darf die Wandergruppe nur höchstens *zwei* Fragen stellen. Jede Frage ist an *genau einen* Pilzsammler zu stellen. Nach der Antwort auf die erste Frage, darf nachgedacht und entschieden werden, an welchen Pilzsammler die zweite Frage gestellt wird.

Wie muss die Gruppe vorgehen, um den Weg zum nächsten Dorf zu finden?

Burgruine Weißenstein auf dem Goldsteig

Lösungsvorschlag:

Es ist nicht bekannt, welche der 3 Personen immer lügt, immer die Wahrheit spricht, bzw. je nach Laune irgendwie antwortet. Ebenfalls unbekannt sind die entsprechenden Namen.

Um die Lösung aber übersichtlicher aufzuschreiben, vereinbaren wir:
<u>W</u>olfgang sagt immer die <u>W</u>ahrheit,
<u>L</u>udwig <u>l</u>ügt immer,
Franz antwortet mal so mal so, manchmal lügt er, manchmal sagt er die Wahrheit, und das ohne regelmässiges Schema zufällig verteilt.

Die erste Frage geht an einen <u>beliebigen</u> Pilzsammler:

„Bei welchem der beiden *anderen* Pilzsammlern ist es wahrscheinlicher die Wahrheit zu finden?“

Es werden 3 Fälle unterschieden:

Fall 1: Erste Frage geht an Wolfgang. → Wolfgang zeigt auf/nennt <u>Franz</u>.

Fall 2: Erste Frage geht an Ludwig. → (Die Wahrheit wäre Wolfgang, aber Ludwig lügt immer.) Ludwig zeigt auf/nennt <u>Franz</u>.

Fall 3: Erste Frage geht an <u>Franz</u>. → Als Antwort kommt entweder Ludwig oder Wolfgang raus, je nach Laune von Franz.

Bei genauer Betrachtung fällt auf, das <u>Franz</u> entweder der Befragte oder derjenige ist, auf den gezeigt worden ist.

Die zweite Frage wird jetzt an denjenigen gestellt, auf den nicht gezeigt worden ist und der in der ersten Frage nicht befragt wurde. (Damit wird die zweite Frage sicher an Wolfgang oder Ludwig gestellt.)

Im Detail
im Fall 1: Zweite Frage an Ludwig.
im Fall 2: Zweite Frage an Wolfgang.
im Fall 3: Zweite Frage geht entsprechend an Ludwig oder Wolfgang.

Zweite Frage:

„Wohin würde mich jener der beiden anderen Pilzsammler schicken, der nicht der Pilzsammler ist, der je nach Laune die Wahrheit bzw. die Unwahrheit sagt?“

Einerseits wird jetzt wieder ausgeschlossen, dass Franz dabei ist.

Zum zweiten haben wir also eine doppelte Verschlüsselung. Einmal Wahrheitsgemäß und einmal mit Negierung wegen Lügens.

Im Detail
im Fall 1: Ludwig wird gefragt, auf welchen Weg Wolfgang deuten würde. Wolfgang deutet auf die korrekte Abzweigung. Ludwig lügt, deutet also auf die <u>falsche Abzweigung</u>.
im Fall 2: Wolfgang wird gefragt, auf welchen Weg Ludwig deuten würde. Ludwig deutet auf die falsche Abzweigung (er lügt ja immer). Wolfgang sagt die Wahrheit. Also zeigt Wolfgang auf die <u>falsche Abzweigung</u>.
im Fall 3 tritt Fall 1 oder Fall 2 ein.

Fazit nach diesen zwei Fragen:

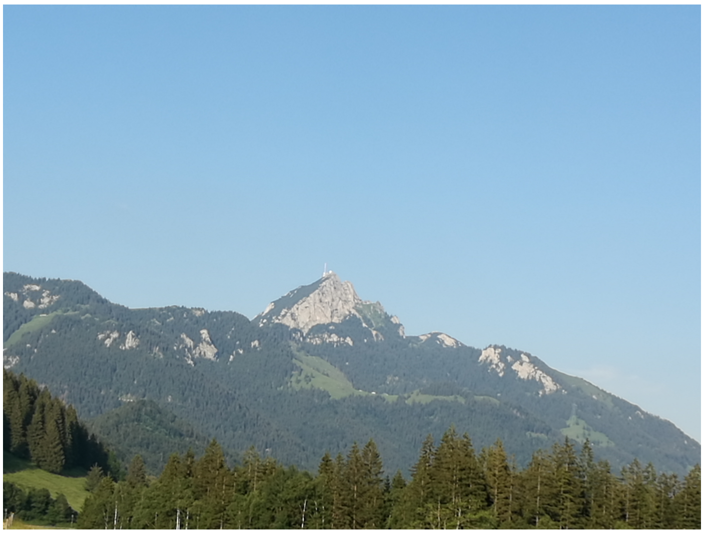
Die Wandergruppe, sollte danach diejenige Weggabelung nehmen, auf die in Frage 2 NICHT gezeigt wurde.

Aufgabe 6: Pension Wendelsteinblick

Zwei Schulklassen aus Bayreuth kommen in der Pension Wendelsteinblick in Bayrischzell mit dem Zug an. Endlich haben Sie den kleinen Anstieg bis zum Hotel mit ihren Koffern erklommen. Jetzt nur noch einchecken...

Aber das geht nicht so einfach: Die Besitzerin hatte Mathematik studiert. Sie sagt: „Eure Lehrerinnen und Lehrer bekommen die exklusiven Ferienwohnungen im Nebengebäude. Ihr seid genau 44 Kinder. Was für ein Zufall genau so viele Betten haben die Zimmer in meiner Pension im Hauptgebäude. Ihr seid also ganz unter Euch. Außerdem hat meine Pension insgesamt 13 Zimmer. Ich habe Zimmer mit 3, 4 und 5 Betten, von jedem Zimmertyp mindestens eins. Es gibt übrigens mehr als ein Vierbettzimmer. Und es gibt mehr Dreibettzimmer als Vierbettzimmer. Auch gibt es mehr Dreibettzimmer als Fünfbettzimmer. Wenn Ihr zusammen herausfindet, wie viele Zimmer mit wie vielen Betten in meiner Pension sind, bekommt jeder von Euch noch kostenlos einen Spezialeisbecher zu Ihrem bzw. Seinem Zimmerschlüssel.“

Innerhalb kurzer Zeit haben die Schülerinnen und Schüler die Lösung. *Ihr auch?*



Wendelstein

Lösungsergebnis:
9 3-Bettzimmer
3 4-Bettzimmer
1 5-Bettzimmer
$9 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 = 27 + 12 + 5 = 44$ Betten für jedes Kind.
Und $9 + 3 + 1 = 13$ Zimmer. Stimmt!